

سازهای تیری

تئوری‌های کلاسیک و پیشرفته

تالیف و ترجمه

آرش رستمی - سعید داداشی - سامان جهانی



نشر علم عمران

www.elme-omran.com
Info@elme-omran.com

عضو:



انجمن کتاب‌های

این اثر مشمول قانون حمایت مولفان و مصنفان و هنرمندان مصوب ۱۳۴۸ است، هر کس تمام یا قسمتی از این اثر را بدون اجازه ناشر و مؤلف، نشر یا پخش یا عرضه کند مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

سرشناسه	: کاررا، اراسموس، Carrera, Erasmo
عنوان و نام پدیدآور	: سازه‌های تیری: تئوری‌های کلاسیک و پیشرفته / اراسموس کاررا، گائتانو جونتا، مارکو پترولو؛ تالیف و ترجمه آرش رستمی، سعید داداشی، سامان جهانی.
مشخصات نشر	: تهران: علم عمران، ۱۳۹۵.
مشخصات ظاهری	: ۲۲۵ ص.: مصور، جدول، نمودار.
شابک	: ۱۷۰۰۰ ریال 5-31-600-978
موضوع	: تیرآهن، Girders، آنالیز ارتجاعی (مهندسی)، پوسته‌ها و صفحه‌های ارتجاعی
موضوع	: تحلیل سازه -- الگوهای ریاضی، حساب تغییرات
موضوع	: Calculus of variations. elasticity. Structural analysis (Engineering)
شناسه افزوده	: سعید داداشی، ۱۳۶۵، مترجم، سامان جهانی، ۱۳۶۸، مترجم، آرش رستمی، ۱۳۶۸، مترجم.
رده بندی کنگره	: ۱۳۹۵ ی۲ت۹ / TA۴۹۲
رده بندی دیویی	: ۶۲۴/۱۷۷۲۳
شماره کتابشناسی ملی	: ۴۵۱۶۰۰۸



نشر علم عمران

سازه‌های تیری، تئوری‌های کلاسیک و پیشرفته
تالیف و ترجمه: آرش رستمی - سعید داداشی - سامان جهانی

چاپ اول	پاییز ۱۳۹۵
چاپ	پرستش
تعداد و قطع صفحات	۲۲۵ صفحه و وزیری
شمارگان	۵۰۰
بهای کتاب	۱۷۰۰۰ ریال
شابک ۵-۳۱-۵۱۷۶-۶۰۰-۹۷۸	ISBN 978-600-5176-31-5

نشر علم عمران: تهران، یوسف آباد، خیابان جهان‌آرا، بین خیابانهای ۱۶ و ۱۸، پلاک ۳۳، طبقه دوم، واحد ۱۱

تلفن: ۸۸۳۵۳۹۳۰-۳۱ دورنگار: ۸۸۳۵۳۹۳۲

حقوق چاپ و نشر برای نشر علم عمران محفوظ است.

زندگی صحنه‌یکتای هنرمندی ماست

هرکسی نغمه خود خواند و از صحنه رود

صحنه پیوسته به جاست

خرم آن نغمه که مردم بسیار ندیده یاد...

با توجه به سرمایه گذاری شخصی در چاپ کتاب
عواید حاصل از فروش به موسسه خیریه «بچه‌های آسمان» و «مهرانه» تقدیم می گردد.

تقدیم بہ پدرم

کوہی استوار و حامی من در طول تمام زندگی

تقدیم بہ مادرم

سنگ صوری کہ الفبای زندگی بہ من آموخت

و

تقدیم بہ پروفور شوقی

بنیانگذار دانشگاه تحصیلات تکمیلی زنجان

آرش رستی

تقدیم بہ

مقدس ترین واثرہ مادر لغت نامہ دلم، مادر مہربانم کہ زندگیم را دیون مہر و عطوفت آن می دانم.

پدر، مہربانی مشفق، بردبار و حامی.

سعید داداشی

تقدیم به همسر

که برداشتن قدم با تو لذت بخش تر است

و

پدر و مادر عزیزم که لذت با سواد شدن بدون همراهی شما ممکن نبود.

سلمان جهانی

پیشگفتار مؤلفین

کتاب پیش رو یکی از کتب پروفیسور Carrera دانشگاه پلی تکنیک تورینو ایتالیا بوده که در مورد سازه‌های تیری نظریه‌ها و تئوری پیرامون این موضوع می‌باشد. پس از مطالعه کتاب توسط نویسندگان، بر آن شدیم که با توجه به عدم وجود چنین کتابی در محیط دانشگاهی کتاب سازه‌های تیری را برای اساتید و دانشجویان به زبانی روان و ساده ترجمه و مواردی را به صورت تالیفی بر آن بیفزاییم. از سوی دیگر کتاب دیگری با عنوان «صفحات و پوسته‌ها برای ساختارهای هوشمند» توسط همین نویسندگان به اتمام رسیده است که می‌توان گفت در راستای همین موضوع بوده و در کنار منابع فراوان دروس «تئوری الاستیسیته» و «تئوری ورق و پوسته» این دو کتاب منبع بسیار ارزشمندی بوده و خلا این دروس سازه‌ای را به طور کامل پوشش می‌دهد.

با توجه به پیشگفتار که در آن پیرامون کتاب و فصول آن توضیحات کلی و جامعی بیان شده از تکرار مجدد آن پرهیز می‌کنیم. امید است با مطالعه این کتاب دانشی اندک به خوانندگان منتقل گردد که در این صورت این کتاب و نویسندگان وظیفه خود را در محیط علمی انجام داده‌اند. همچنین در آینده‌ای نزدیک و ترم جدید تحصیلی کتاب «صفحات و پوسته‌ها برای ساختارهای هوشمند» نیز از همین انتشارات به چاپ خواهد رسید.

به کمک پروردگار منان و نیز لطف برخی از دوستان انجام این امر میسر نبود. در هنگام آماده‌سازی این آثار عزیزانی ما را یاری فرمودند که بجاست بگوییم تلاشی مضاعف از نویسندگان انجام دادند. خانم فولادی (دفتر فنی پایتخت) بابت تایپ و خانم رستمی (دفتر تبلیغاتی نقش واره) بابت صفحه آرایی و طراحی جلد و نیز سرکار خانم سپیده حنیفی که کمک شایانی به ما در این مسیر فرمودند و نیز دکتر داوودنبی مدیر مسوول انتشارات علم عمران و جناب آقای دکتر احمد ملکی بابت معرفی این کتاب جهت انجام آن. با توجه به اینکه این کتاب نیز مانند دیگر آثار خالی از اشکال و ایراد

نمی‌باشد از اساتید، مهندسين و دانشجویان گرانقدر تقاضا داریم نظرات و پیشنهادات خود را به ایمیل Rostami.Civil.Books@gmail.com ارسال نمایند تا در ویرایش‌های بعدی کتاب مدنظر قرار گرفته و ارتقا علمی با نظرات شما خوانندگان محترم باشد.

باسپاس فراوان

آرش رستمی، سعید داداشی، سامان جهانی

آذر ماه ۱۳۹۵

۱۳	مقدمه
۱۹	فصل اول: معادلات اصلی اجسام تغییر شکل پذیر پیوسته
۲۱	۱. خلاصه
۲۱	۱-۱ جابجایی، کرنش و تنش
۲۲	۲-۱ معادلات تعادل از نظر اجزای تنش و شرایط مرزی
۲۳	۳-۱. روابط کرنش و جابجایی
۲۳	۴-۱ روابط مشخصه: قانون هوک
۲۵	۵-۱ رویکرد جابجایی از طریق اصل جابجایی مجازی
۳۱	فصل دوم: نظریه اویلر - برنولی و تیموشنکو
۳۳	۱-۲ مدل اویلر - برنولی
۳۴	۱-۱-۲ میدان جابجایی
۳۶	۲-۱-۲ کرنش‌ها
۳۶	۳-۱-۲ تنش‌ها و عوامل تنش
۳۹	۴-۱-۲ الاستیکا
۴۰	۲-۲ مدل تیموشنکو
۴۰	۱-۲-۲ میدان جابجایی
۴۰	۲-۲-۲ کرنش‌ها
۴۰	۳-۲-۲ تنش‌ها و عوامل تنش
۴۲	۴-۲-۲ الاستیکا
۴۲	۳-۲ خمش تیر یک سر گیردار: راه حل‌های EBBT و TBT
۴۳	۱-۳-۲ راه حل EBBT
۴۴	۲-۳-۲ راه حل TBT
۴۹	فصل سوم: نظریه بهبود یافته تیر با کشش درون صفحه:
	نمونه موردی انبساط خطی کامل
۵۱	۱-۳ میدان جابجایی نمونه موردی انبساط خطی کامل
۵۲	۲-۳ اهمیت عبارات کشش خطی

۵۶	۳-۳ المان محدود مبتنی بر CLEC
۶۱	فصل چهارم: مدل‌های TBH، EBBT و CLEC
	به صورتی منسجم و متحدالشکل
۶۳	۱-۴ فرمولاسیون متحد مدل CLEC
۶۵	۲-۴ مدل‌های EBBT و TBT به عنوان نمونه‌های خاصی از CLEC
۶۷	۳-۴ قفل پواسون و اصلاح آن
۶۸	۱-۳-۴ ملاحظات حرکتی کرنش‌ها
۶۸	۲-۳-۴ ملاحظات فیزیکی کرنش‌ها
۶۹	۳-۳-۴ راه حل نخست: استفاده از سینماتیک مرتبه بالاتر
۶۹	۴-۳-۴ راه حل دوم: اصلاح ضرایب الاستیک
۷۵	فصل پنجم: فرمولاسیون یکپارچه کار را
	و نظریه‌های پالوده شده مربوط به تیر
۷۷	۱-۵ فرمولاسیون یکپارچه
۷۹	۲-۵ معادلات حاکم
۷۹	۱-۲-۵ شکل قوی معادلات حاکم
۷۹	۱-۱-۲-۵ تغییر انرژی کرنشی
۸۱	۲-۱-۲-۵ کار مجازی بارگذاری‌های خارجی
۸۳	۳-۱-۲-۵ هسته اساسی معادلات دیفرانسیلی حاکم
۸۴	۴-۱-۲-۵ شکل قوی راه حل تحلیلی
۸۶	۲-۲-۵ شکل ضعیف معادلات حاکم
۸۸	۱-۲-۲-۵ ماتریس سختی
۹۱	۲-۲-۲-۵ ماتریس جرم
۹۳	۳-۲-۲-۵ بردار بارگذاری
۹۷	فصل ششم: نظریه‌های تیر سهموی، مکعب، چارکی و مرتبه N
۹۹	۱-۶ مدل تیر مرتبه دوم، $N = 2$
۱۰۱	۲-۶ مدل‌های تیر مرتبه سوم، $N = 3$ ، و مرتبه چهارم، $N = 4$
۱۰۴	۳-۶ مدل‌های تیری مرتبه N
۱۰۷	فصل هفتم: مدل‌های المان محدود تیری مبتنی بر
	فرمولاسیون یکپارچه کار را:
	دستورالعمل‌های مسائل برنامه نویسی و پیاده سازی

۱۱۰	۱-۷ توصیف پیش پردازش و ورودی
۱۱۰	۱-۱-۷ ورودی‌های المان محدود عمومی
۱۱۰	۱-۱-۱-۷ داده‌های هندسه و شبکه
۱۱۴	۲-۱-۱-۷ بارها و شرایط مرزی
۱۱۶	۳-۱-۱-۷ خواص مواد
۱۱۶	۴-۱-۱-۷ نوع تجزیه و تحلیل
۱۱۶	۲-۱-۷ ورودی‌های خاص فرمولاسیون یکپارچه کاررا
۱۱۶	۱-۲-۱-۷ مرتبه مدل تیر
۱۲۰	۲-۲-۱-۷ هندسه سطح مقطع
۱۲۲	۲-۷ کد روش المان محدود
۱۲۲	۱-۲-۷ ماتریس سختی و جرم
۱۲۲	۱-۱-۲-۷ اجرای مبتنی بر هسته
۱۲۴	۲-۱-۲-۷ انتگرال‌های خط
۱۲۶	۳-۱-۲-۷ قفل شوندگی برشی
۱۲۸	۴-۱-۲-۷ انتگرال‌های سطح
۱۳۰	۲-۲-۷ مثال‌های عددی ماتریس سختی و جرم
۱۳۳	۳-۲-۷ محدودیت‌ها و مدل‌های کاهش یافته
۱۳۶	۴-۲-۷ بردار بار
۱۳۸	۳-۷ پس‌پردازش
۱۳۹	۱-۳-۷ تنش‌ها و کرنش‌ها
۱۴۱	فصل هشتم: قابلیت‌های پوسته‌ای نظریه‌های پالوده شده تیر
۱۴۳	۱-۸ سطح مقطع C شکل و بارگذاری خمشی-پیچشی
۱۴۵	۲-۸ استوانه میان تهی با دیواره نازک
۱۴۷	۱-۲-۸ تجزیه و تحلیل استاتیک: تشخیص اثرات محلی ناشی از بار نقطه‌ای
۱۴۹	۲-۲-۸ تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد: شناسایی حالات طبیعی پوسته مانند
۱۵۴	۳-۸ تجزیه و تحلیل‌های استاتیک و ارتعاش آزاد تیر باله‌ای شکل
۱۵۷	۴-۸ ارتعاشات آزاد تیر پل مانند
۱۵۹	فصل نهم: پایداری الاستیک خطی شده
۱۶۱	۱-۹ راه حل کلاسیک بار کمانش بحرانی
۱۶۴	۲-۹ مدل‌های مرتبه بالاتر فرمولاسیون یکپارچه کاررا

۱۶۵	۹-۲-۱ معادلات حاکم، هسته اساسی
۱۶۵	۹-۲-۲ راه حل تحلیلی فرم بسته
۱۶۶	۹-۳ مثال‌ها
۱۷۱	فصل دهم: تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی
۱۷۳	۹-۱ مواد مدرج تابعی
۱۷۶	۱۰-۲ قوانین درجه بندی مواد
۱۷۶	۱۰-۲-۱ قانون درجه بندی نمایی
۱۷۷	۱۰-۲-۲ قانون درجه بندی توان
۱۷۷	۱۰-۲-۲-۱ قانون ترکیب‌ها
۱۷۸	۱۰-۲-۲-۲ قانون اصلاح شده ی ترکیب‌ها
۱۷۸	۱۰-۲-۲-۳ طرح موری-تاناکا
۱۷۹	۱۰-۲-۲-۴ روش خودسازگار هیل
۱۷۹	۱۰-۳ مدل سازی تیر
۱۸۱	۱۰-۴ مثال‌ها
۱۸۹	فصل یازدهم: نظریه های چند مدلی تیر از طریق روش آریلیکوئین
۱۹۱	۱۱-۱ رویکردهای چند مدلی
۱۹۲	۱۱-۱-۱ رویکردهای تک نظریه‌ای
۱۹۲	۱۱-۱-۲ رویکردهای چند نظریه‌ای
۱۹۳	۱۱-۲ روش آریلیکوئین در زمینه فرمولاسیون یکپارچه
۱۹۷	۱۱-۳ مثال‌ها
۲۰۹	فصل دوازدهم: دستورالعمل‌ها و پیشنهادات
۲۱۱	۱۲-۱ روش‌های بدیهی و مجانبی
۲۱۲	۱۲-۲ روش ترکیبی بدیهی-مجانبی
۲۱۶	۱۲-۳ تاثیر بار
۲۱۸	۱۲-۴ تاثیر سطح مقطع
۲۱۹	۱۲-۵ تاثیر مکان خروجی
۲۲۰	۱۲-۶ مدل‌های کاهش یافته برای ورودی‌های مختلف خطا
۲۲۳	منابع

مقدمه

در این بخش، مقدمه‌ای کوتاه در مورد مطالب کتاب همراه با مرور کلی مشارکت این کتاب در تجزیه و تحلیل سازه‌های تیری ارائه شده است.

دلیل نگارش کتاب دیگری در مورد تیرها

نیازی به کتاب دیگری در مورد نظریه‌های تیر وجود ندارد. در واقع، کتابهای بسیاری در دسترس هستند که به قلم برخی از برجسته‌ترین و با استعدادترین دانشمندان در حوزه تئوری الاستیسیته و سازه نوشته شده‌اند. تحریر کتابی بهتر امری بسیار دشوار است. پس چرا باید یک کتاب جدید در مورد نظریه‌های تیر نوشت؟ دلیل آن این است که این کتاب روشی برای کار با نظریه تیر ارائه میدهد که پیشتر در نظر گرفته نشده است. همانطور که در فصل‌های بعدی توضیح داده خواهد شد، روشی که توسط نویسندگان اول برای صفحات و پوسته‌ها در دهه گذشته معرفی شده بود در اینجا برای تیرها اعمال می‌شود تا گروه بزرگی از نظریه‌های (تیری) سلسله مراتبی (حرکتی متغیر) یک بعدی ایجاد شود، که همگی برای ساخت معادلات حاکم و یا ماتریس‌المان محدود مبتنی بر تکنیک‌های خودکار هستند. نظریه‌های منتج شده امکان کار با هندسه سطح مقطع تحت هر شرایط بارگذاری و، در عین حال، دستیابی به راه‌حل‌های شبه سه بعدی را فراهم می‌آورد. این نتایج حاصله هستند که منجر به منحصر به فرد بودن کتاب حاضر می‌شوند.

بررسی پیشینه پژوهش

نظریه‌های تیر به طور گسترده برای تجزیه و تحلیل رفتار ساختاری اجزای بلند و باریک از قبیل ستون‌ها، قوس‌ها، تیغه‌ها، بال هواپیما، و پل‌ها استفاده می‌شوند. مزیت اصلی مدل‌های تیری این است که آنها مساله سه بعدی را به مجموعه‌ای از متغیرها کاهش می‌دهد که تنها مبتنی بر مختصات تیر-محور هستند. المان‌ها ساختاری یک بعدی به دست آمده ساده تر هستند و از نظر محاسباتی

کارآمدتر از المان‌ها دو بعدی (صفحه / پوسته) و سه بعدی (جامد) هستند. این ویژگی باعث می‌شود نظریه‌های تیر برای تجزیه و تحلیل استاتیکی و دینامیکی سازه‌ها بسیار جذاب باشند. نظریه‌های کلاسیک که کاربرد فراوانی داشته‌اند توسط اوایلر-برنولی (برنولی، ۱۷۵۱؛ اوایلر، ۱۷۴۴)، د سنت و نانت (۱۸۵۶ الف، ب)، و تیموشنکو (۱۹۲۱، ۱۹۲۲) ارائه شده‌اند. دو مورد اول تغییر شکل برشی عرضی را در نظر نمی‌گیرند. مدل تیموشنکو توزیع برشی یکنواختی در امتداد سطح مقطع تیر در نظر می‌گیرد. مقایسه جامع نظریه‌های اوایلر-برنولی و تیموشنکو توسط موسیچسکو (۱۹۸۴) انجام شده است. با این حال، هیچ یک از این نظریه‌ها نمی‌توانند اثرات غیر کلاسیک مانند تاب خوردگی، تغییر شکل خارج از صفحه و داخل صفحه، جفت‌شدگی پیچشی-خمشی، و یا شرایط مرزی موضعی، چه هندسی و چه مکانیکی، را تشخیص دهند. این اثرات معمولاً ناشی از نسبت‌های کوچک لاغری، دیواره‌های نازک، و ناهمسانگردی مواد هستند.

روش‌های بسیاری برای غلبه بر محدودیت‌های نظریه‌های کلاسیک و فراهم آوردن امکان استفاده از مدل‌های یک بعدی برای هر هندسه یا شرایط مرزی پیشنهاد شده است. نمونه‌های بسیاری از این مدل‌ها را می‌توان در بسیاری از کتاب‌های معروف در مورد نظریه الاستیسیته، به عنوان مثال، کتاب نووژیلو (۱۹۶۱)، پیدا کرد. تحولات اخیر در مدل‌های تیری با استفاده از روش‌های مختلف از قبیل معرفی عوامل اصلاح برشی، استفاده از توابع تاب خوردگی بر اساس راه حل دو سنت و نانت، راه حل مجانبی تغییر (VABS)، نظریه‌های تعمیم یافته تیر (GBTs)، و مدل‌های تیر مرتبه بالاتر به دست آمده است.

برای ثابت کردن پاسخ کلی نظریه‌های تیری کلاسیک، کارهای بسیاری با استفاده از عوامل اصلاح برشی مناسب، مانند کتاب‌های تیمونشکو و گودیر (۱۹۷۰) و سوکولنیکف (۱۹۵۶)، انجام شده است. در میان بسیاری از مقالات موجود در مورد این موضوع، مقالات کوپر (۱۹۶۶)، کریشنا مورتی (۱۹۸۵)، پای و شولتز (۱۹۹۹)، و مچاب و همکاران (۲۰۰۸) به طور خاصی مورد توجه قرار گرفته‌اند. گراتمن و همکارانش (گراتمن و همکاران ۱۹۹۹؛ گراتمن و واگنر، ۲۰۰۱؛ واگنر و گراتمن، ۲۰۰۲) تلاش بسیاری کرده‌اند تا عوامل اصلاح برشی را برای چند حالت ساختاری از قبیل تنش‌های پیچشی و خمشی برشی در تیرهای منشوری، سطح مقطع‌هایی با اشکال دلخواه، سازه‌های گسترده، با دیواره‌های نازک، و پل مانند محاسبه کنند.

ال فاطمی (ال فاطمی، ۲۰۰۲، a, B, C، ال فاطمی و زلزری، ۲۰۰۴) با معرفی تابع تاب خوردگی، φ ، به منظور افزایش شرح تنش نرمال و برشی تیر، مدل‌های جابجایی در طول سطح مقطع تیر را بهبود بخشیدند. همانطور که در کار کرایترمن (۱۹۸۷) اظهار شده است، تاثیر انتهای سطح مقطع با توجه به شرایط مرزی با استفاده از این مدل بررسی شده است.

راه حل د سنت و نانت مبنای نظری بسیاری از مدل‌های تیری پیشرفته بوده است. لادوز و

همکارانش (لادوز و سیموندز، ۱۹۹۶، ۱۹۹۸؛ لادوز و همکاران، ۲۰۰۴) معادلات الاستیسیته سه بعدی را به سازه‌های تیر مانند کاهش داده‌اند. راه حل حاصل به عنوان مجموع بخش د سنت ونانت و بخش باقی مانده مدل‌سازی شده و برای تیرهایی با نسبت ابعاد بالا با سطح مقطع‌هایی با دیواره‌های نازک اعمال شده است. دیگر نظریه‌های تیر مبتنی بر میدان جابجایی پیشنهادی لس آن (۱۹۸۶) بوده و با استفاده از المان محدود نیمه تحلیلی پیشنهادی دونگ و همکارانش (دونگ و همکاران، ۲۰۰۱؛ کوسماتکا و همکاران، ۲۰۰۱؛ لین و همکاران، ۲۰۰۱؛ لین و دونگ، ۲۰۰۶) حل شده‌اند.

بسط‌های مجانبی توسط بردیچسکای و همکاران (۱۹۹۲) بر اساس روش‌های تغییری ارائه شده‌اند. این کار نشان دهنده نقطه شروع یک روش جایگزین برای ساخت نظریه تیر پالوده شده است که در آن یک پارامتر مشخصه (به عنوان مثال، ضخامت سطح مقطعی تیر) برای ساخت یک سری مجانبی مورد استفاده قرار می‌گیرد. عباراتی که هنگام به صفر رسیدن پارامتر مرتبه یکسانی با آن دارند، باقی می‌مانند. مدل‌هایی که به روش مجانبی کمک کرده‌اند مربوط به مدل‌های ارائه شده توسط ولوی و همکاران (۱۹۹۹)، ولوی و هاجز (۲۰۰۰)، پوپسکو و هاجز (۲۰۰۰)، یو و همکاران (۲۰۰۲a، b) و یو و هاجز (۲۰۰۴، ۲۰۰۵) می‌باشند.

نظریه‌های تعمیم یافته تیر از کار شارت (شارت، ۱۹۶۶، ۱۹۸۹، ۱۹۹۴) گرفته شده‌اند. نظریه‌های تعمیم یافته تیر با استفاده از توصیف توابع چند ضابطه‌ای تیر سطح مقطع‌هایی با دیواره‌های نازک تئوری‌های کلاسیک را بهبود می‌بخشند. نظریه‌های تعمیم یافته تیر به طور گسترده‌ای، در اشکال مختلف، توسط سیلوستره و کاموتیم و همکارانشان (دینیس و همکاران، ۲۰۰۶؛ سیلوستره، ۲۰۰۲، ۲۰۰۳، ۲۰۰۷؛ سیلوستره و کاموتیم، ۲۰۰۲) به کار رفته و توسعه یافته‌اند. نظریه‌های مرتبه بالاتر بسیاری مبتنی بر میدان جابجایی بهبود یافته در طول سطح مقطع تیر معرفی شده‌اند تا اثرات غیر کلاسیک را نیز در بر گیرند. ملاحظات مربوط به نظریه‌های مرتبه بالاتر تیر توسط واشیزو (۱۹۶۸) مطرح شده‌اند. مدل پیشرفته‌ای توسط کاسر-سرولچای و شیک شین (۱۹۸۴) ارائه شده است؛ این نویسندگان المان‌ها محدود کلاسیک تیر را با معرفی درجات آزادی جدیدی برای توصیف رفتار سطح مقطع تیر بهبود بخشیدند. سایر مدل‌های تیری پالوده شده را می‌توان در بررسی انجام شده توسط کاپانیا و راسیتی (۱۹۸۹a، b) پیدا کرد که بر خمش، ارتعاش، انتشار موج، کمانش و پسا کمانش متمرکز شده است. مساله‌های هواکشسانی سازه‌هایی با دیواره‌های نازک با استفاده از تیرهایی با مرتبه بالاتر توسط لیبرسکو و سانگ (۱۹۹۲) و شین و لیبرسکو (۲۰۰۲) مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

پیشینه پژوهش نشان دهنده توجه به توسعه بیشتر نظریه‌های پالوده شده برای تیرها می‌باشد.

رویکردهای کلاسیک و نوین: روش‌های تغییر و فرمولاسیون یکپارچه کاررا

در این کتاب برای تجزیه و تحلیل استاتیکی و دینامیکی سازه‌های یک بعدی، "تیرهایی" با سطح مقطع‌های فشرده و دیواره‌های نازک، بر نظریه‌های پالوده شده تنها با متغیرهای جابجایی تعمیم یافته تمرکز شده است. مدل‌های مرتبه بالاتر در چارچوب فرمولاسیون یکپارچه کاررا بدست آمده‌اند. این فرمولاسیون در دهه گذشته برای مدل‌های صفحه‌ای / پوسته‌ای توسعه یافته (کاررا، ۱۹۹۵، ۲۰۰۲، ۲۰۰۳؛ کاررا و همکاران، ۲۰۰۸) و اخیراً برای مدل سازی تیر گسترش یافته است (کاررا و گیونتا، ۲۰۱۰). فرمولاسیون حاضر برای تجزیه و تحلیل استاتیکی سازه‌های فشرده و دارای دیواره نازک مورد استفاده قرار گرفته است (کاررا و همکاران، ۲۰۱۰a). تجزیه و تحلیل‌های ارتعاش آزاد بر روی مدل‌های استوانه‌ای میان تهی و بال شکل انجام شده‌اند (کاررا و همکاران، ۲۰۱۱، ۲۰۱۱). مدل تیری تنها با درجه آزادی جابجایی توسعه داده شده است (کاررا و پترولو، ۲۰۱۰) و نتایج مجانبی مانند در مطالعه کاررا و پترولو (۲۰۱۱) به دست آمده است.

فرمولاسیون یکپارچه کاررا فرمولاسیونی سلسله مراتبی است که مرتبه مدل را به عنوان پارامتر آزاد (یعنی ورودی) تجزیه و تحلیل در نظر می‌گیرد. به عبارت دیگر، مدل‌های پالوده شده بدون نیاز به فرمولاسیون‌های موقت بدست می‌آیند. نظریه‌های تیر بر اساس بسط نوع تیلور بدست می‌آیند. نظریه‌های تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو به عنوان موارد خاص به دست آمده‌اند. روش المان محدود برای کار با هندسه‌ها و همچنین شرایط هندسی و بارگذاری دلخواه استفاده شده است.

نمای کلی مطالب

برای نشان دادن خلاصه‌ای از آنچه که مورد بحث قرار خواهد گرفت، شرح مختصری از طرح کتاب ارائه می‌شود. فصل ۱ معادلات اساسی که تجزیه و تحلیل‌های ساختاری بر اساس آنها انجام شده‌اند، یعنی معادلات تعادل، روابط هندسی کرنش-جابجایی، و معادلات ساختاری، را ارائه می‌دهد. اصل جابجایی مجازی نیز به دو صورت قوی و ضعیف معرفی می‌شود.

فصل ۲ به تشریح نظریه‌های تیری کلاسیک، یعنی مدل اویلر-برنولی و تیموشنکو، می‌پردازد. مدل حرکتی این نظریه‌ها معرفی شده و سپس کرنش‌ها، تنش‌ها، و معادلات الاستیکا مشتق می‌شوند. مثال‌های عددی به منظور تاکید بر تفاوت‌های بین این دو مدل ارائه می‌شود.

اولین مدل پالوده شده این کتاب در فصل ۳ مطرح می‌شود، که در آن نمونه بسط کامل خطی ارائه شده است. توجه خاصی به اهمیت عبارات کشش درون صفحه‌ای مشخص کننده این مدل مبذول شده است. چند مثال به منظور تاکید بر اهمیت این عبارات و ناکارآمدی مدل‌های کلاسیک برای مقابله با کشش درون صفحه‌ای ارائه شده است.

اولین تلاش در جهت ساخت یک نظریه یکپارچه در فصل ۴ انجام شده است، که در آن مدل‌های

کلاسیک و خطی فوق به شیوه‌ای یکپارچه نشان داده شده‌اند. روش ارائه شده نشان دهنده اولین گام اساسی در به دست آوردن فرمولاسیون یکپارچه کاررا است. این فصل با بحث در مورد پدیده قفل شدگی پواسون و اصلاح آن به پایان می‌رسد.

فرمولاسیون یکپارچه کاررا در فصل ۵ معرفی می‌شود و شرح مفصلی از تمام نکات کلیدی مربوط به فرمولاسیون یکپارچه کاررا ارائه می‌شود. اشکال قوی و ضعیف این فرمولاسیون نیز ارائه می‌شود. تمامی ماتریس‌های اساسی با استفاده از سیستم مونتاژ هسته اساسی، که نشان دهنده هسته فرمولاسیون است، بدست می‌آیند.

فصل ۶ تعدادی از نظریه‌های مرتبه بالاتر از نظر میدان جابجایی و کرنش را ارائه می‌دهد. فرمول‌های مورد نیاز برای به دست آوردن مدل‌هایی با هر مرتبه مشخص به منظور تاکید بر قابلیت‌های سلسله مراتبی فرمولاسیون یکپارچه کاررا ارائه شده است.

گزارش گسترده و جامع دستورالعمل اجرا در فصل ۷ ارائه شده است که در آن تمام مسائل اصلی مربوط به اجرای المان محدود فرمولاسیون یکپارچه کاررا از جمله روش مونتاژ، ادغام عددی، و مراحل اصلی پیش و و پسا پردازش مطرح شده است. تعداد زیادی معیار عددی به منظور انجام مقایسه ارائه شده است. سپس چند فصل بعدی به کاربرد مدل‌های تیری فرمولاسیون یکپارچه کاررا می‌پردازند.

فصل ۸ قابلیت‌های به اصطلاح پوسته مانند مدل را نشان می‌دهد. چند مساله ساختاری با توجه خاصی به سازه‌هایی با دیواره‌های نازک و بارهای نقطه‌ای در نظر گرفته شده است. مقایسه مدل‌های پوسته‌ای و جامد از نظر دقت و هزینه محاسباتی نیز ارائه شده است.

تجزیه و تحلیل کمانش در فصل ۹ انجام شده است، در حالی که فصل ۱۰ گسترش مدل فرمولاسیون یکپارچه کاررا به سازه‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی را نشان می‌دهد.

فصل ۱۱ روش آرلیکوئین و کاربرد آن در مدل‌های تیری فرمولاسیون یکپارچه کاررا را مطرح می‌کند. سازه‌ها با استفاده از نظریه‌های تیری چند مرتبه‌ای تجزیه و تحلیل شده‌اند؛ یعنی، مرتبه مدل تیری به صورت متمرکز تنظیم می‌شود تا هزینه‌های محاسباتی تجزیه و تحلیل بهینه سازی شود.

تجزیه و تحلیل گسترده اثربخشی نظریه‌های مرتبه بالاتر در فصل ۱۲ انجام می‌شود، که در آن روش به اصطلاح بدیهی-مجانبی ارائه شده و برای ساخت مدل‌های پالوده شده بر اساس دقت مشخصی که به عنوان ورودی تجزیه و تحلیل در نظر گرفته شده مورد استفاده قرار گرفته است. اثر پارامترهای مشخصه مختلف مانند نسبت لاغری، شرایط مرزی و متغیرهای خروجی نیز در نظر گرفته شده است.

فصل اول

معادلات اصلی

اجسام تغییر شکل پذیر پیوسته

۱-۱. خلاصه

در این فصل معادلات هندسی و ساختاری مکانیک ساختاری محیط‌های پیوسته در مورد حالت خطی مرور می‌شوند و علائم و سیستم‌های مرجع مورد استفاده در طول کتاب نیز معرفی می‌شوند.

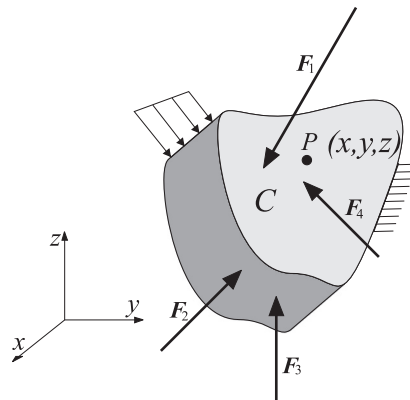
۱-۱ جابجایی، کرنش و تنش

اکنون جسم تغییرشکل پذیر پیوسته C با حجم V در یک سیستم دکاری سه متعامدی x, y, z و Z را همانطور که در شکل (۱-۱) نشان داده شده است را در نظر می‌گیریم. متغیرهای مرتبط زیر معرفی می‌شوند:

جابجایی‌های، u ، در نقطه، P :

$$u = \{u_x, \quad u_y, \quad u_z\}^T$$

هنگامی که جسم C در معرض شرایط مرزی مکانیکی و طبیعی قرار بگیرد، سه تابع پیوسته $u_x(x, y, z)$ ، $u_y(x, y, z)$ ، $u_z(x, y, z)$ حالت تغییرشکل یافته جسم C را به دست می‌دهند. محاسبه چنین حالت تغییر شکل یافته‌ای مشکل اساسی الاستیسیته سه بعدی باقی مانده است.



شکل ۱-۱ هندسه و نمادهای جسم تغییر شکل پذیر سه بعدی.

کرنش‌ها، ϵ :

$$\epsilon = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{zx}, \epsilon_{yx}, \epsilon_{yz}\}^T$$

این نُه عبارت توصیف کننده پیکربندی تغییر شکل یافته در یک دوره سه متعامدی بردار واحد (i_x, i_y, i_z) در نقطه P هستند. تغییرشکل‌های محوری عبارتند از:

$$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$$

کرنش‌های برشی، که متقارن هستند، عبارتند از:

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}, \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}, \quad \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy}$$

تنش‌ها، σ ، در نقطه P

$$\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy}, \sigma_{zx}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}\}^T$$

تنش‌های محوری عبارتند از:

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$$

تنش‌های برشی، که متقارن هستند، عبارتند از:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

۱-۲ معادلات تعادل از نظر اجزای تنش و شرایط مرزی

معادلات تعادل اساسی زیر در یک نقطه عمومی از جسم C صادق هستند:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = \mathbb{X} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = \mathbb{Y} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1-1)$$

که در آن $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ نیروهای جسم در واحد حجم می‌باشند. روی مرز جسم C، اجزای بردار تنش در یک نقطه عمومی باید شرایط زیر را دارا باشند:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z = \mathbb{P}_x \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z = \mathbb{P}_y \\ \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z = \mathbb{P}_z \end{cases} \quad (2-1)$$

که در آن n_x, n_y, n_z کسینوس‌های جهت هستند، و P حاصل نیروهای خارجی در واحد سطح است که روی مرز جسم C عمل می‌کند. این عبارات به عنوان شرایط مرزی مکانیکی شناخته می‌شوند. شرایط هندسی را نیز می‌توان با بیان حالت زیر اعمال کرد:

$$\begin{cases} u_x = U_x \\ u_y = U_y \\ u_z = U_z \end{cases} \quad (3-1)$$

که در آن U_x, U_y, U_z جابجایی‌های تحمیل شده بر سطح خارجی جسم C هستند.

۳-۱. روابط کرنش و جابجایی

کرنش‌ها از طریق روابط هندسی زیر که تحت فرض خطی بودن معتبر هستند با جابجایی در رابطه هستند:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \epsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \epsilon_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \epsilon_{zy} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{cases} \quad (4-1)$$

که در آن ϵ_{xy} و ϵ_{zy} اجزای کرنش مهندسی هستند که معمولاً به صورت γ_{xy} و γ_{zy} نشان داده می‌شوند. در این کتاب هر دو علامت ϵ و γ برای نشان دادن اجزای کرنش مهندسی استفاده می‌شوند.

۴-۱ روابط مشخصه: قانون هوک

اجزای تنش و کرنش مستقل نیستند، یک رابطه فیزیکی وجود دارد که بستگی به مواد مورد استفاده دارد. در مورد الاستیک خطی، حالات قانون هوک به شرح زیر هستند:

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\} \quad (5-1)$$

که در آن ضرایب صلبیت C_{ij} معرفی شده‌اند. سازگاری‌های الاستیک را نیز می‌توان مورد استفاده قرار داد:

$$\{\epsilon\} = [S] \{\sigma\} \quad (۶-۱)$$

در مواد همسانگرد، شکل صریح و روشن جسم C به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (۷-۱)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} = C_{33} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{12} = C_{13} = C_{23} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} &= G \end{aligned} \quad (۸-۱)$$

با اشاره به سازگاری‌های الاستیک، خواهیم داشت:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (۹-۱)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} S_{11} = S_{22} = S_{33} &= 1/E \\ S_{12} = S_{23} = S_{13} &= -(\nu/E) \\ S_{44} = S_{55} = S_{66} &= 1/G \end{aligned} \quad (۱۰-۱)$$

E مدول یانگ است، G مدول برشی است، و ν نسبت پواسون است که رابطه آن‌ها به صورت زیر است:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (۱۱-۱)$$

۵-۱ رویکرد جابجایی از طریق اصل جابجایی مجازی

معادلات سه بعدی که در بخش‌های قبلی نوشته شدند تنها بخشی از معادلات شناخته شده اجسام تغییر شکل پذیر هستند. متغیرهای دیگری مانند توابع تنش و همچنین شرایط سازگاری در کرنش‌ها را نیز می‌توان معرفی کرد. عبارات تغییری مناسبی را می‌توان برای ایجاد شکل تغییرات معادلات سه بعدی معرفی کرد، که نمونه‌های شناخته شده آن اصل جابجایی مجازی، اصل نیروهای مجازی، و اصول تغییرات مخلوط هستند (مانند بیانیه تغییرات هو-واشیزو). این موارد در این کتاب مورد بحث قرار نمی‌گیرند، جزئیات بیشتر در کتاب واشیزو (۱۹۶۸) در دسترس می‌باشد. مزایای اصلی اشاره به عبارات تغییرات عبارتند از:

معادلات سه بعدی حاکم را می‌توان به هر دو صورت ضعیف و قوی نوشت. نظریه‌های تقریبی را می‌توان مطرح کرد و معادلات تغییرات حاکم سازگار را می‌توان بدست آورد. با توجه به انتخاب متغیرهای مجهول، معادلات سه بعدی را می‌توان به روش‌های مختلف تدوین کرد، یعنی، فرمولاسیون‌های جابجایی، تنش، و یا ترکیبی را می‌توان مورد استفاده قرار داد. این کتاب تنها به مجهول‌های جابجایی اشاره می‌کند. عبارت تغییرات مربوط اصل جابجایی مجازی (PVD) است، که اظهار دارد که تغییر مجازی کار داخلی، δL_{int} باید با تغییر مجازی کار خارجی و اینرسی، δL_{ext} و δL_{ine} برابر باشد:

$$\underbrace{\int_V \delta \epsilon^T \sigma dV}_{\delta L_{int}} = \delta L_{ext} + \delta L_{ine} \quad (12-1)$$

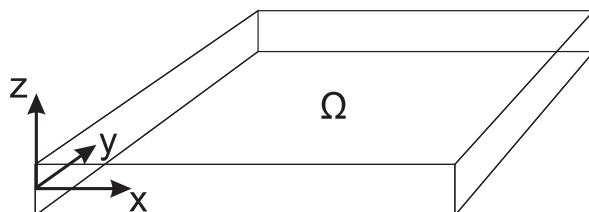
که در آن V دامنه حجم جسم است. در نظریه تدوین شده جابجایی سازه‌ها، متغیرهای جابجایی از نظر دیگر مقادیر و یا متغیرهای جابجایی بیان می‌شوند. اگر مساله سه بعدی در نظر گرفته شود، متغیر عمومی جابجایی، S ، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$s(x, y, x) = F_\tau(x, y, z)S_\tau, \quad \tau = 1, M \quad (13-1)$$

که در آن $F_\tau(x, y, z)$ توابع پایه مورد استفاده برای تخمین S بالای V است؛ S_τ مجهول‌های مساله هستند، که می‌تواند مقادیر جابجایی، مشتقات آنها، و یا عبارات مرتبه بالاتر کلی باشد. معنای S_τ به گسترش اتخاذ شده بستگی دارد. اصل جابجایی مجازی برای به دست آوردن معادلات حاکم با توجه به متغیرهای S_τ استفاده می‌شود.

نقش F_{τ} مربوط به مدلی است که برآورد می‌شود. به عنوان مثال، توابع پایه در مورد صفحات زیرسری در امتداد جهت ضخامت معرفی می‌شوند، که در شکل (۲-۱) قابل مشاهده است:

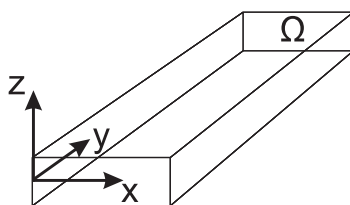
$$F_{\tau_{plate}} = f(z) \quad (۱۴-۱)$$



شکل ۲-۱ دامنه و کانتور صفحه زیرسری

این امر به این معنی است که تقریب‌ها در زمینه جابجایی بالاتر از ضخامت صفحه زیرسری معرفی می‌شوند. در مورد تیرها، توابع پایه بالاتر از سطح مقطع، Ω ، معرفی می‌شوند که در شکل ۳-۱ قابل مشاهده است:

$$F_{\tau_{beam}} = f(x, z) \quad (۱۵-۱)$$



شکل ۳-۱ دامنه و کانتور صفحه زیرسری

سپس، زمینه جابجایی بالاتر از سطح مقطع با استفاده از $F_{\tau}(x, z)$ مدل سازی می‌شود. معادلات حاکم را می‌توان به دو صورت قوی و ضعیف فرموله کرد. هر دو حالت فرمولاسیون‌ها در این کتاب مورد استفاده قرار می‌گیرند. راه حل‌های فرموله شده به صورت قوی معمولاً به دو صورت مشارکت دارند:

مشارکت از طرف تعادل در یک نقطه از دامنه:

$$\delta S_s : K_{\tau,s} S_\tau = P_\tau \quad (16-1)$$

که در آن P_τ بار خارجی و $K_{\tau,s}$ ماتریس صلبیت است.

مشارکت از طرف شرایط مرزی:

$$\Pi_{\tau,s} S_\tau = \Pi_{\tau,s} \bar{S}_\tau \quad (17-1)$$

که در آن $\bar{S}_\tau$ جابجایی تحمیل شده در مرزها است.

راه حل‌های فرموله شده به صورت ضعیف در این کتاب از طریق روش اجزاء محدود (FES) به دست می‌آیند. در این حالت، تنها یک معادله حاکم به دست می‌آید:

$$\delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{K}^{ij\tau s} \mathbf{q}_{sj} = P_{\tau i} \quad (18-1)$$

که در آن i و j شاخص مربوط به چند جمله‌ای درون یابی به نام توابع شکل هستند. شرایط مرزی با اعمال بر ماتریس سختی تحمیل می‌شوند. شایان ذکر است که باید به موارد زیر در مورد اشکال قوی و ضعیف راه حل‌ها توجه داشت:

- راه حل‌های فرموله شده به شکل قوی راه حل دقیقی مطابق با تقریب مربوط به مدل ساختاری اتخاذ شده ارائه می‌دهند. این به این معنی است که تنها منبع خطا مربوط به مفروضات مدل است. ابعاد ماتریس‌ها، یعنی، هزینه محاسباتی توسط تعداد مجهولات مدل مشخص می‌شود. از سوی دیگر، راه حل‌های بسته معمولاً برای تعداد محدودی از هندسه‌ها و شرایط مرزی در دسترس هستند.

- راه حل‌های فرموله شد به شکل ضعیف امکان مقابله با هندسه و شرایط مرزی قراردادی را فراهم می‌آورند. خطا در این راه حل‌ها تنها مربوط به مفروضات مدل نیست، بلکه عوامل بیشتری مانند تعداد المان‌ها مورد استفاده در مورد مدل‌های اجزاء محدود نیز در آن نقش دارند. هزینه محاسباتی نیز به سطح پالایش گسسته سازی مربوط می‌شود: هرچه شبکه ظریف تر باشد، تلاش محاسباتی بیشتری مورد نیاز است.

شرح مفصل هر دو فرمولاسیون‌ها در فصل‌های بعدی کتاب ارائه می‌شود.

نکته کلیدی در توسعه نظریه‌های مربوط به سازه‌ها متشکل از انتخاب مناسب متغیرهای مجهول برای متعادل کردن پیچیدگی نظریه و دقت آن با توجه به یک "راه حل دقیق" شناخته شده، در صورت وجود، می‌باشد. این کتاب به استفاده از بسط‌های عمومی مانند معادله (۵-۱) برای تیرها

برای ساخت معادلات حاکم با استفاده از اصل جابجایی مجازی کمک می‌کند. نظریه تیرهای سلسله مراتبی و یا، بهتر، مدل‌های تک بعدی برای تجزیه و تحلیل هر نوع سازه تنها با اشاره به متغیرهای جابجایی کلی معرفی شده‌اند.

منابع

Washizu, K 1968 Variational methods in elasticity and plasticity Pergamon.

